Colles de Maths - semaine 12 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, E^* son espace dual. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que pour tout i, $e_i^* = f_i$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension infinie, et admet une base $(e_i)_{i\in I}$. La famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est-elle libre ? génératrice ?

Exercice 2 Soit E, F, G, H quatre K-espaces vectoriels de dimension finie, $a \in \mathcal{L}(E,F)$, $b \in \mathcal{L}(G,H)$ et $\psi_{a,b}$ l'application de $\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,H)$ définie par

$$\psi_{a,b}(u) = b \circ u \circ a.$$

Déterminer l'image de $\psi_{a,b}$ en fonction de a et b.
Indication : commencer par déterminer la dimension du noyau.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p_1, ..., p_m$ des projecteurs de E.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ est un projecteur si et seulement si pour tous $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.
Indication : Pour le sens direct, montrer que $\mathrm{Im}\left(\sum_i p_i\right) = \bigoplus_{i=1}^m \mathrm{Im}(p_i)$.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par K et donner un exemple de corps K ne vérifiant pas cette condition pour lequel le résultat est faux.

Matrices

Exercice 4 Déterminer le déterminant de l'application linéaire

$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array}\right. .$$

Exercice 5 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $M = X^tY$.
2. Montrer que si M est de rang 1, I_n+M est inversible si et seulement $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$, et donner une expression de son inverse.

Exercice 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle.
Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Pour les meilleurs : donner une condition sur K pour que le résultat soit encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, et un contre-exemple sur un corps K ne vérifiant pas cette condition.

Exercice 7 Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(AB) = f(A)\, f(B)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Réduction

Exercice 8 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application qui à $f \in E$ associe la fonction définie par

$$T(f) : \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 9 Soit E l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, bornées. Soit T l'application qui à $u \in E$ associe la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 10 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients réels strictement positifs telle que

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et que l'espace propre associé (sur $\mathbb{C}$) est une droite.
2. Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur à 1.
3. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1.